E.N.S.I.L.

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges

Options M P P' (4 heures)

Options T T' (3 heures)

Les parties A et C 2 du II sont réservées aux candidats des options M P P'. Cependant les autres candidats devront utiliser au II B le résultat du A.

Notations: $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Pour $n \geq 2$ $\mathbb{N}_n$ est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels

$\mathcal{O}(n)$ est le groupe des matrices orthogonales d'ordre n.

a_{ij} est le terme de la ligne i et de la colonne j d'une matrice A

${}^tA$ est la matrice transposée de A

$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{ii}$ est la trace de A

$\mathrm{Det}(A)$ est le déterminant de A.

But du problème:

On rappelle que toute matrice symétrique réelle A admet n valeurs propres réelles, distinctes ou non, et que pour une telle matrice, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

A étant une matrice symétrique réelle, on se propose de construire une suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de matrices orthogonales d'un type très simple telle que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$A_1 = A \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$$

converge vers une matrice diagonale D ayant les mêmes valeurs propres que A avec le même ordre de multiplicité.

I Partie préliminaire

1. (a) Montrer qu'on définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour toute matrice A

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2} a_{ij}^2}$$

(b) Montrer que cette norme vérifie:

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

(c)Vérifier:

(1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$

(2) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

(3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \qquad \forall \Omega \in \mathcal{O}(n) \qquad \|{}^t\Omega A \Omega\| = \|A\|$

2. Soient $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $1 \leq p < q \leq n$ et θ un nombre réel

Montrer que la matrice Ω dont les coefficients ω_{ij} sont définis par

$$\begin{aligned} \omega_{ii} &= 1 \quad \text{pour} \quad i \neq p \quad i \neq q \\ \omega_{pp} &= \omega_{qq} = \cos\theta \\ \omega_{pq} &= \sin\theta \\ \omega_{qp} &= -\sin\theta \\ \omega_{ij} &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

est orthogonale. (On pourra, dans $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, considérer l'endomorphisme u canoniquement associé à Ω).

3. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, et $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $1 \leq p < q \leq n$.

On suppose $a_{pq} \neq 0$

(a) Montrer qu'il existe une et une seule valeur de $\theta \in]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4]$ telle que si Ω désigne la matrice orthogonale associée à (p,q,θ) comme au 2, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ vérifie $b_{pq} = 0$.

On vérifiera que θ est l'unique solution dans $]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4]$ de :

$$2a_{pq} \cos 2\theta = (a_{qq} - a_{pp}) \sin 2\theta$$

(b) En calculant les coefficients b_{ij} de la matrice B, montrer que cette matrice vérifie

$$\sum_{i=1}^{i=n} {b_{ii}}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} {a_{ii}}^2 + 2{a_{pq}}^2$$

Vérifier qu'en posant

$$t = \tan\theta \qquad c = \cos\theta \qquad s = \sin\theta$$

les coefficients de B satisfont à

$$b_{pp} = a_{pp} - t\, a_{pq} \qquad b_{qq} = a_{qq} + t\, a_{pq}$$

et pour $j \neq p \quad j \neq q$

$$b_{pj} = c\, a_{pj} - s\, a_{qj} \qquad b_{qj} = c\, a_{qj} + s\, a_{pj}$$

II

Rappels

1. $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant une suite d'un espace vectoriel normé E, un élément a de E est *une valeur d'adhérence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si:

pour tout voisinage V de a dans E et pour tout entier naturel N il existe un entier n tel que

$$n > N \quad \text{et} \quad x_n \in V$$

2. Une condition nécessaire et suffisante pour que a soit une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est qu'on puisse extraire de cette suite une suite convergente de limite a.

A (candidats M P P' seulement)

1. Soit X un espace vectoriel normé de dimension finie et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de points de X ayant un nombre fini $p \neq 0$ de valeurs d'adhérence : $a_1, \ldots, a_p$

$\mathcal{B}(a_k, \varepsilon)$ désignant la boule ouverte de centre a_k et de rayon ε dans l'espace vectoriel normé X, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Big(n > N(\varepsilon) \Longrightarrow x_n \in \bigcup_{k\in\mathbf{N}_p} \mathcal{B}(a_k, \varepsilon)\Big)$$

2. Déduire du 1 que toute suite bornée de points de X ayant un nombre fini de valeurs d'adhérence et vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

est convergente.

(*On montrera* d'abord en raisonnant par l'absurde que nécessairement $p = 1$)

B (tous les candidats)

on rappelle aux candidats des options T T' qu'ils doivent admettre le résultat du A 2

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est muni de la norme définie au I.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n.

** On définit la suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ comme suit:

$$A_1 = A \qquad \text{et, pour } k \in \mathbf{N}^*, \text{ on pose } A_k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]_{(i,j)\in\mathbf{N}_n^2}$$

on choisit (p, q), $1 \leq p < q \leq n$ tels que $|a_{pq}^{(k)}| = \underset{1\leq i<j\leq n}{\text{Max}} |a_{ij}^{(k)}|$

Si $a_{pq}^{(k)} = 0$, A_k est diagonale et $\forall l \in \mathbf{N}\ A_{k+l} = A_k$

Si $a_{pq} \neq 0$, A_{k+1} est déduite de A_k comme B est déduite de A dans le I 3.

** Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$A_k = D_k + B_k$$

où D_k est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_{11}^{(k)}, \ldots, a_{nn}^{(k)}$

1. (a) Montrer que

$$\|B_{k+1}\|^2 \leq \left[1 - \frac{2}{n(n-1)}\right] \|B_k\|^2$$

(b) En déduire $\lim_{k\to\infty} B_k = 0$

2. (a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ M & \longrightarrow & \mathrm{Det}(M) \end{array}$$

est continue.

(b) Montrer que la suite de matrices diagonales $(D_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est bornée.

(c) On note I_n la matrice unité d'ordre n

Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $(D_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une matrice diagonale D telle que

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \mathrm{Det}(D - \lambda I_n) = \mathrm{Det}(A - \lambda I_n)$$

(d) Montrer que la suite $(D_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ admet au plus $n!$ valeurs d'adhérence, et qu'elle vérifie toutes les hypothèses du A 2.

(e) Conclure.

C

D'après l'étude faite au B, on obtiendra des valeurs approchées des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle en considérant les coefficients diagonaux de D_k pour "k assez grand".

1. Donner un algorithme en français, (ou si on préfère une **procédure** en Turbo-Pascal), pour la détermination du couple (p, q) nécessaire pour passer d'une matrice A à la suivante.

2 (M P P' seulement). Donner un algorithme (ou une procédure) pour le passage d'une matrice A à la suivante (voir B et I 3).

FIN